Felipe Antonio Cajero Cruz

Geometría y Trigonometría

Bachillerato Tecnológico

Libro del maestro
Edición anotada

MONTENEGRO®
TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN

MB
Montenegro Bachillerato

Índice

Presentación 3

Al maestro 4

Al alumno 5

Conoce tu libro 8

Bloque 1. Conceptos básicos del espacio y la forma: el estudio de las figuras trigonométricas 11

En contexto 12

1. Conceptos básicos de geometría 13

1.1 Elementos, características y notación de los ángulos 14

1.1.1 Notación de los ángulos 15

1.1.2 Clasificación de los ángulos 15

1.1.3 Ángulos formados por rectas paralelas y transversales 17

1.2 Sistemas de medición de ángulos 19

1.2.1 Conversiones del sistema de medición angular 20

1.2.2 Formas manual e instrumental de medir ángulos 21

1.2.3 Ángulos positivos y negativos 22

1.2.4 Estimación de ángulos 23

2. Triángulos 26

2.1 Elementos y clasificación de los triángulos 27

2.1.1 Clasificación de los triángulos según el tamaño de sus lados 27

2.1.2 Clasificación de los triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos 29

2.2 Relaciones métricas de los ángulos en un triángulo 29

2.3 Relaciones métricas entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo 34

2.3.1 Mediatriz 34

2.3.2 Medianas 35

2.3.3 Bisectriz 35

2.3.4 Alturas 36

3. Polígonos 40

3.1 Notación y clasificación de los polígonos 41

3.2 Cuadriláteros 42

3.3 Polígonos regulares 44

4. Fórmulas de perímetro, área y volumen 49

5. Circunferencia 56

5.1 Elementos del círculo 57

5.2 Ángulos en la circunferencia 58

Actividad integradora 64

Instrumentos de evaluación 66

Evaluación sumativa 68

© MONTENEGRO®

Bloque 2. Propiedades geométricas: criterios de congruencia y semejanza de triángulos 69

En contexto 70

1. Propiedades fundamentales de los triángulos 70

1.1 Congruencia de triángulos 72

1.1.1 Criterio LLL 72

1.1.2 Criterio LAL 72

1.1.3 Criterio ALA 73

1.2 Criterios de semejanza de triángulos 77

1.3 Teorema de Tales 82

1.4 Teorema de Pitágoras 90

2. Perímetro y área del círculo 99

2.1 Área del círculo 100

2.1.1 Áreas de figuras circulares 100

2.1.2 Área del sector circular 100

2.1.3 Área de la corona 102

2.2 Área de figuras compuestas con secciones circulares 102

Actividad integradora 106

Instrumentos de evaluación 107

Evaluación sumativa 109

Bloque 3. Funciones trigonométricas 111

En contexto 112

1. Relaciones trigonométricas 113

2. Funciones en el plano cartesiano 127

3. Funciones trigonométricas para triángulos que no son rectángulos 134

4. El círculo trigonométrico y las identidades trigonométricas 145

Actividad integradora 155

Instrumentos de evaluación 156

Evaluación sumativa 158

Bibliografía 159

© MONTENEGRO®

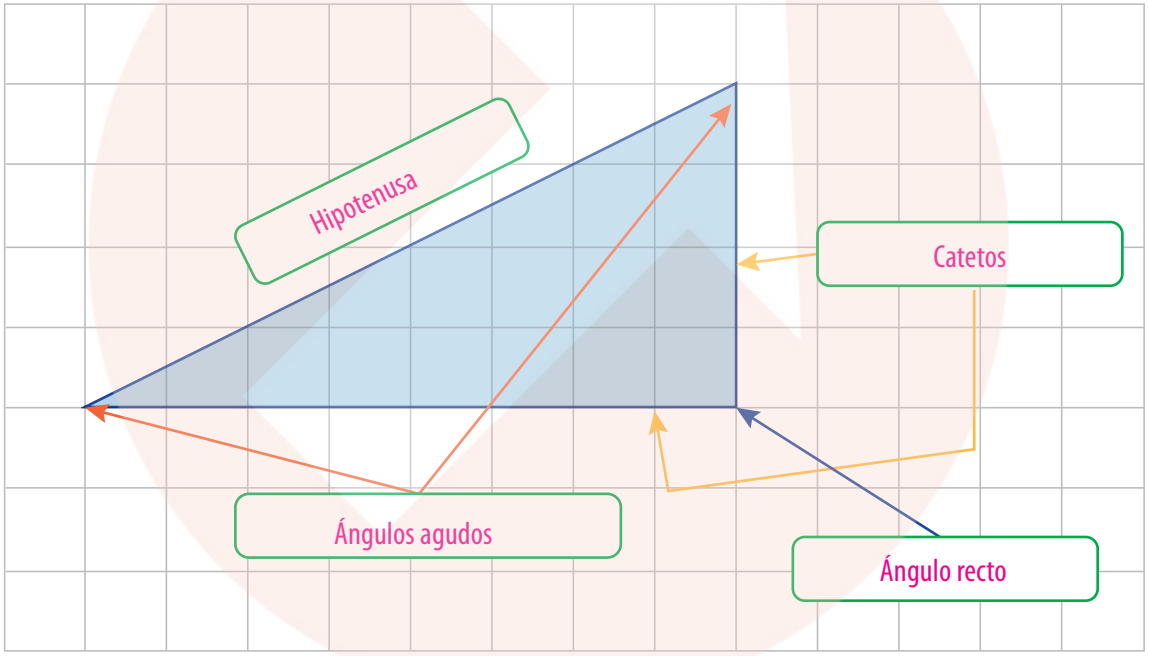
1. Relaciones trigonométricas

Trigonometría proviene de las raíces griegas *trigonon*, que significa triángulo, y *metron*, medida; *trigonon* se compone de *tris* y *tria*, cuyo significado es tres, y *gonia*, ángulo, es decir, **medida de los tres ángulos**. En resumen, la trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos en los triángulos, así podemos tanto conocer como entender su utilidad y aplicación en diferentes ámbitos profesionales en los que esta parte de la geometría es no sólo importante sino necesaria.

PARA INICIAR

1. Utiliza las palabras del recuadro para escribir los nombres de cada elemento del triángulo rectángulo.

Hipotenusa • Catetos • Ángulos agudos • Ángulo recto



2. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué relación existe entre los segmentos que forman un triángulo rectángulo?
El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

b) ¿Cómo se le llama a esta regla? Teorema de Pitágoras.

c) ¿Conoces alguna relación entre los ángulos y los lados del triángulo rectángulo?, ¿cuál?
La respuesta dependerá de la experiencia del alumno.

© MONTENEGRO®

En el bloque anterior se abordaron los elementos que forman al triángulo rectángulo; en el presente apartado los analizaremos con mayor profundidad.

Si tomamos como punto de referencia uno de los ángulos y observamos detenidamente, entonces los catetos adquieren una definición más precisa.

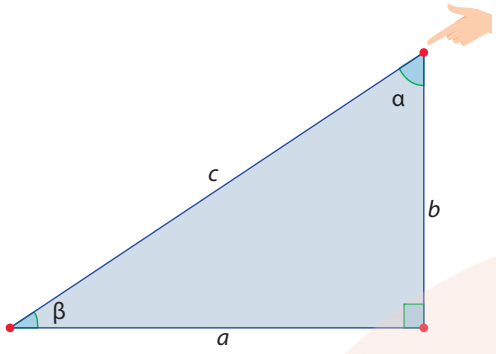


Fig. 3.1 Elementos de un triángulo rectángulo.

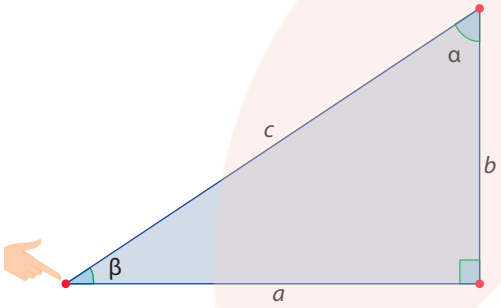


Fig. 3.2 Elementos de un triángulo rectángulo.

Tomemos el ángulo α (fig. 3.1):

El cateto *a* se nombra **cateto opuesto**, ya que se encuentra en el lado opuesto al ángulo α.

El cateto *b* recibe el nombre de **adyacente** por ser el cateto que está junto al ángulo α.

Tomando como referencia al ángulo β (fig. 3.2):

El cateto *b* se nombra **cateto opuesto**, ya que se encuentra en el lado opuesto al ángulo β.

El cateto *a* recibe el nombre de **cateto adyacente**, puesto que es el cateto que está junto al ángulo α.

Como puedes observar, los catetos adquieren un nombre según el ángulo que tomamos como referencia para analizar el triángulo rectángulo. Es importante que los identifiques, ya que esto te permitirá realizar tus procedimientos de forma adecuada y establecer correctamente las **funciones** trigonométricas al momento de aplicarlas para resolver un problema.

Glosario

Función.
Es una relación que se establece entre dos conjuntos, y a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno.

Recíprocas.
Dos expresiones matemáticas que al multiplicarse se obtiene como resultado la unidad.

Razones trigonométricas

Una **razón** es la comparación entre dos magnitudes; por ejemplo, la rapidez con que se mueve un cuerpo se define como la razón del desplazamiento con respecto al tiempo, y hablando específicamente de la trigonometría, es la comparación entre dos lados del triángulo rectángulo. Son tres las razones trigonométricas básicas y sus respectivas **recíprocas**. Las trigonométricas son la huella digital de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. A saber:

1. *Seno del ángulo* $= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

2. *Coseno del ángulo* $= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

3. *Tangente del ángulo* $= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

4. *Cosecante del ángulo* $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

5. *Secante del ángulo* $= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

6. *Cotangente del ángulo* $= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Simplificando la escritura de las funciones para el cálculo de los datos:

1. $sen\theta = \frac{CO}{H}$

2. $cos\theta = \frac{CA}{H}$

3. $tan\theta = \frac{CO}{CA}$

4. $csc\theta = \frac{H}{CO}$

5. $sec\theta = \frac{H}{CA}$

6. $ctg\theta = \frac{CA}{CO}$

© MONTENEGRO®

Donde:

$sen\theta$ → *seno del ángulo* $\quad$ $csc\theta$ → *cosecante del ángulo*

$cos\theta$ → *coseno del ángulo* $\quad$ $sec\theta$ → *secante del ángulo*

$tan\theta$ → *tangente del ángulo* $\quad$ $ctg\theta$ → *cotangente del ángulo*

H → *hipotenusa* $\quad$ CA → *cateto adyacente* $\quad$ CO → *cateto opuesto*

Algunos autores emplean *tg* como abreviatura de la tangente, y *cot* para la cotangente.

EnlazaTIC

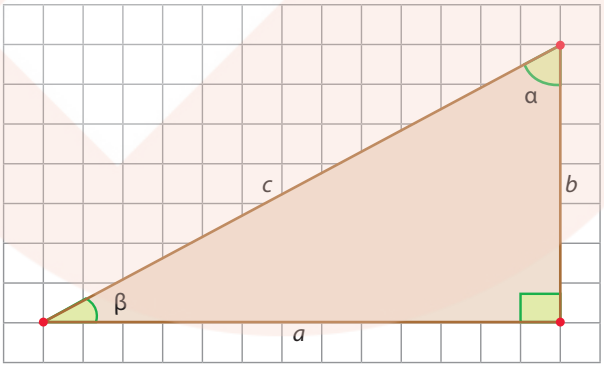
En el siguiente enlace encontrarás una explicación para ayudarte a identificar las relaciones trigonométricas.
https://goo.gl/fSDHMV

(Consulta: 12 de octubre de 2018).

PARA CONTINUAR

Competencia genérica	Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Competencia disciplinar	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

1. Analiza el triángulo rectángulo de la imagen y determina las funciones trigonométricas para cada uno de los ángulos agudos.



Conecta con

Tecnologías de la Información y la Comunicación

Enlaza con

Toma responsable de decisiones
Elige con responsabilidad.

Colaboración
Construye relaciones.

Para α:

$sen\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ $csc\alpha = \frac{c}{a}$

$cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad$ $sec\alpha = \frac{c}{b}$

$tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad$ $ctg\alpha = \frac{b}{a}$

Para β:

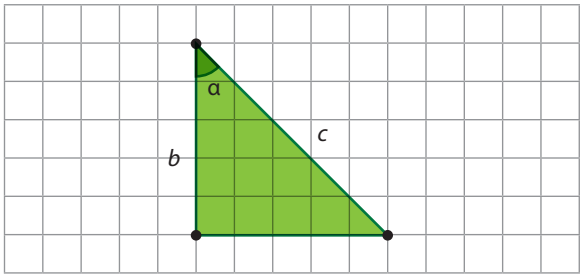
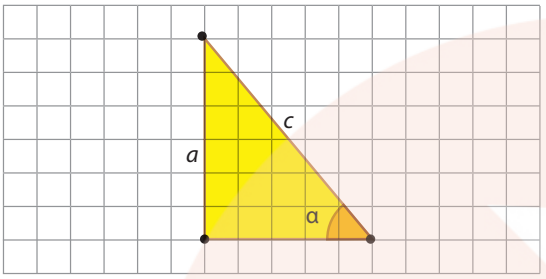
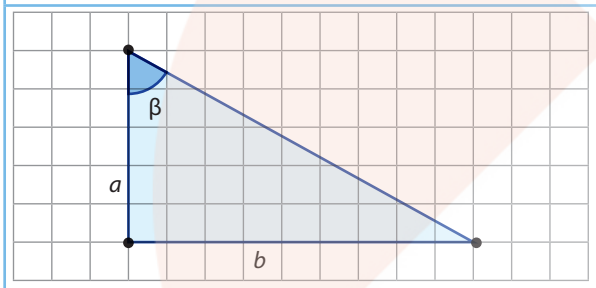
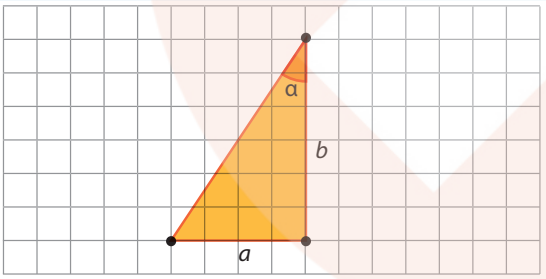
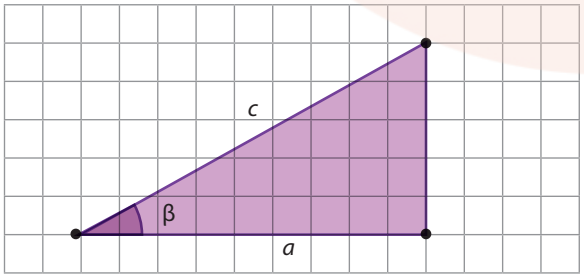
$sen\beta = \frac{b}{c}$ $\quad$ $csc\beta = \frac{c}{b}$

$cos\beta = \frac{a}{c}$ $\quad$ $sec\beta = \frac{c}{a}$

$tan\beta = \frac{b}{a}$ $\quad$ $ctg\beta = \frac{a}{b}$

© MONTENEGRO®

2. Completa la tabla con las funciones trigonométricas correspondientes a cada triángulo según los datos que se proporcionan.

	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\sec\alpha = \frac{c}{b}$
	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ $\csc\alpha = \frac{c}{a}$
	$\tan\beta = \frac{b}{a}$ $\cot\beta = \frac{a}{b}$
	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a}$
	$\cos\beta = \frac{a}{c}$ $\sec\beta = \frac{c}{a}$

3. En grupo, resuelvan las funciones frente a todos y rectifiquen sus resultados. Comenten qué criterios utilizaron para cada solución con base en los datos proporcionados.

4. Consideren algunos de los ejercicios para el álbum digital incluyendo un ejemplo de su aplicación.

5. Esta actividad se evalúa con una rúbrica. Consulten: montenegroeditores.com.mx

© MONTENEGRO®

Usos y funciones de las relaciones trigonométricas en el triángulo

Las relaciones trigonométricas, mejor conocidas como funciones trigonométricas, se emplean en el cálculo de ángulos internos y segmentos de un triángulo rectángulo; normalmente las funciones que se emplean son seno, coseno y tangente. La función que se emplea depende de los datos que se tengan de un triángulo rectángulo.

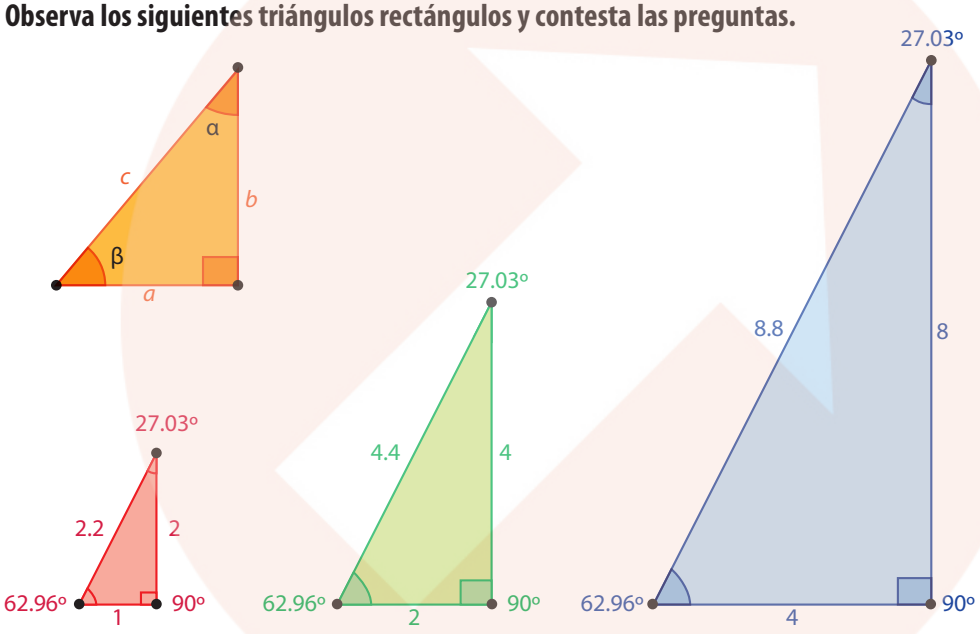
PARA CONTINUAR

Competencia genérica	Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Competencia disciplinar	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

1. Observa los siguientes triángulos rectángulos y contesta las preguntas.

Conecta con
Geometría Analítica

Enlaza con
Toma responsable de decisiones
Elige con responsabilidad.



a) ¿Cómo son los lados de cada triángulo respecto de sus homólogos? Proporcionalmente directos.

b) ¿Cómo son los ángulos internos de cada triángulo respecto de sus ángulos homólogos? Iguales.

c) ¿Cómo son los triángulos entre sí? Semejantes.

d) Con las medidas del triángulo azul, divide el cateto opuesto al ángulo de 62.96° entre el cateto adyacente a este ángulo, y multiplícalo por el cateto adyacente al ángulo de 62.96°. ¿Qué resultado obtuviste al hacer estas operaciones?
8. El valor del cateto opuesto al ángulo de 62.96 del triángulo azul.

e) Divide la hipotenusa entre el cateto adyacente al ángulo de 62.96° en el triángulo verde y multiplica el resultado por el cateto adyacente al ángulo de 62.96° del triángulo rojo. ¿Qué resultado obtuviste al realizar estas operaciones?
Resulta 2.2 como hipotenusa del triángulo rojo.

f) Divide la hipotenusa entre el cateto opuesto del ángulo 62.96 del triángulo azul y multiplica el resultado por el cateto opuesto del ángulo 62.96 del triángulo verde. ¿Cuál fue el resultado que obtuviste en cada división? Resulta 4.4 como hipotenusa del triángulo verde.

© MONTENEGRO®

g) ¿Qué puedes deducir de los resultados que obtuviste en las preguntas anteriores?
Respuesta libre.

2. Investiga qué posibles aplicaciones tiene el cálculo de hipotenusas en profesiones que se relacionan con las matemáticas. Pide a tu maestro que te oriente en la investigación.

3. Con ayuda del maestro, comparen sus respuestas en grupo y en caso de encontrar diferencias justifiquen sus respuestas.

4. Esta actividad se evalúa con una rúbrica. Consulten: montenegroeditores.com.mx

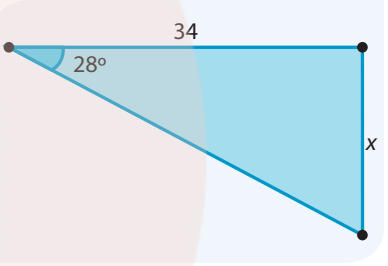
Saber más

El astrónomo, geógrafo y matemático griego Hiparco de Nicea, construyó una tabla de cuerdas para resolver triángulos. Comenzó con un ángulo de 71° y yendo hasta 180° con incrementos de 71°, la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central, dado que corta una circunferencia de radio *r*. Sin embargo, no se sabe el valor que Hiparco utilizó para *r*.

Como puedes corroborar en la actividad anterior, las relaciones entre las magnitudes de los triángulos rectángulos pueden entenderse como unas constantes de proporcionalidad que nos permitirán calcular el valor de uno de los segmentos de un triángulo si conocemos el valor de uno de los ángulos y de uno de sus lados, ya que las relaciones trigonométricas son únicas para cada ángulo de 0 a 90°.

Ejemplo 1

Identificamos la relación trigonométrica que se puede armar con los datos que tenemos.



Sustituimos los valores:

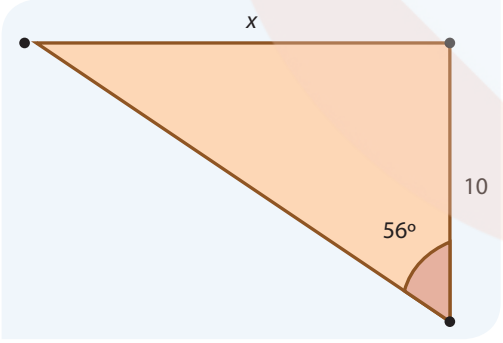
$$\tan\theta = \frac{CO}{CA}$$

$$\tan 28° = \frac{34}{x}$$

Despejamos y resolvemos:

$$x = \frac{34}{\tan 28°}$$

$$x = 63.94$$



Ejemplo 2

Identificamos la relación trigonométrica:

$$\tan\theta = \frac{CO}{CA}$$

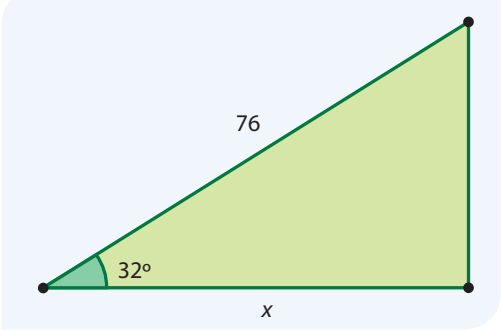
Sustituimos los valores:

$$\tan 56° = \frac{x}{10}$$

Despejamos y resolvemos:

$$x = 10\tan 56°$$

$$x = 14.83$$



Ejemplo 3

$$\cos\theta = \frac{CA}{H}$$

$$\cos 32° = \frac{x}{76}$$

$$x = 76\cos 32°$$

$$x = 64.45$$

© MONTENEGRO®

Felipe Antonio Cajero Cruz

Geometría y Trigonometría

Bachillerato Tecnológico

Dosificación programática del maestro

ISBN 978-607-627-257-2

MONTENEGRO®
TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN

MB
Montenegro Bachillerato

Semana 1

Secuencia didáctica 1

Bloque 1. Conceptos básicos del espacio y la forma: el estudio de las figuras trigonométricas			
Temas	1. Conceptos básicos de geometría 1.1 Elementos, características y notación de los ángulos 1.1.1 Notación de los ángulos 1.1.2 Clasificación de los ángulos 1.1.3 Ángulos formados por rectas paralelas y transversales	**Horas 4**	**Páginas 13-18**
Aprendizajes esperados	• Distingue conceptos básicos de: recta, segmento, semirrecta, línea curva. • Interpreta los elementos y las características de los ángulos. • Mide, manual e instrumentalmente, los objetos trigonométricos y da tratamiento a las relaciones entre los elementos de un triángulo.		
Competencias genéricas	Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.		
Competencias disciplinares	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.		
Recursos adicionales	• Referencias y páginas de internet adicionales: - https://goo.gl/tSiaAN - https://goo.gl/twmHVc - https://goo.gl/fDnXoe		
Competencias socioemocionales	• **Toma responsable de decisiones.** Elige con responsabilidad. • **Perseverancia.** Trabaja por sus metas.		
Reforzamiento académico	• Trabajos específicos derivados de las necesidades propias del aprendizaje individual o colectivo. - Ejercicios propuestos por el maestro en los que el alumno distinga entre recta, semirecta y segmento de recta.		
Instrumentos de evaluación	Rúbrica.		

Sugerencias didácticas:

- Organiza una lluvia de ideas en la que se recuperen conocimientos previos que se tienen sobre el tema de ángulos.
- Pide una investigación sobre la medición de ángulos que realizaban las culturas antiguas.
- Organiza una sesión en equipos para que identifiquen ángulos en distintos ámbitos de la vida cotidiana.
- Pide a los alumnos que hagan un formulario en el que se incluyan las simbologías de cada uno de los trazos que se han trabajado.
- Pide a los alumnos personalizar el formulario y completarlo conforme avanza el ciclo escolar.

© MONTENEGRO®