Bachillerato General

Matemáticas II

Maríana Sáiz Roldán · Edith Sáiz Roldán

MONTENEGRO®
TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN

MB
Montenegro Bachillerato

Índice

Presentación al alumno 3

Conoce tu libro 7

Evaluación diagnóstica 11

Bloque 1
Ángulos y triángulos 13

- Conceptos clave 14
- Secuencia 1. **Elementos geométricos** 15
  - Conceptos geométricos 15
  - Ángulos 20
- Secuencia 2. **Triángulos** 25
  - Clasificación y propiedades 25
  - Rectas y puntos notables 29
  - Congruencia y semejanza de triángulos 33
  - Proporcionalidad y semejanza 38
- Secuencia 3. **Dos teoremas de geometría** 41
  - Teorema de Tales 42
  - Teorema de Pitágoras 43
- Evaluación 49

Bloque 2
Propiedades de los polígonos 51

- Conceptos clave 52
- Secuencia 4. **Polígonos** 53
  - Definición de polígono, vértices, lados y diagonales 53
  - Ángulos en un polígono: central, interior y exterior 58
- Secuencia 5 **Área y perímetro** 63
  - Perímetro 64
  - Área 66
- Secuencia 6. **Volumen** 71
  - Elementos y clasificación: volúmenes de pirámides y prismas 71
- Evaluación 79

© MONTENEGRO®

Bloque 3
Círculo y circunferencia 81

Conceptos clave 82

Secuencia 7. **Conceptos y elementos del círculo y la circunferencia** 83

Concepto de círculo y circunferencia 83

Rectas notables del círculo 84

Perímetro del círculo 86

Secuencia 8. **Área de un círculo** 93

Otros ángulos del círculo y sus propiedades 93

El área del círculo 96

Secuencia 9. **Áreas de sectores, segmentos y otras regiones circulares** 99

Regiones circulares 99

Evaluación 105

Bloque 4
Razones trigonométricas 107

Conceptos clave 108

Secuencia 10. **Triángulos rectángulos** 109

Elementos de un triángulo rectángulo y razones entre sus lados 109

Medidas de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo 110

Razones entre lados de triángulos rectángulos semejantes 111

Razones trigonométricas 113

Secuencia 11. **Ángulos agudos notables** 119

Valores típicos de razones trigonométricas 120

Calculadora y razones trigonométricas 121

Secuencia 12. **Aplicación de las razones trigonométricas** 126

Algo más sobre medición de ángulos 126

Otras razones trigonométricas 127

Problemas que se resuelven con trigonometría 128

Evaluación 135

© MONTENEGRO®

Bloque 5
Funciones trigonométricas 137

- Conceptos clave 138
- Secuencia 13. **Funciones trigonométricas** 139
  - Definición de las funciones trigonométricas 140
  - Definición de las funciones trigonométricas inversas 147
- Secuencia 14. **Identidades trigonométricas** 151
  - Tres tipos de identidades 151
- Secuencia 15. **Gráficas de funciones trigonométricas** 162
  - Gráficas de funciones periódicas 163
- Evaluación 169

Bloque 6
Triángulos oblicuángulos 171

- Conceptos clave 172
- Secuencia 16. **Propiedades de los triángulos no rectángulos** 173
  - Funciones trigonométricas de ángulos suplementarios y complementarios 174
  - Resolución de triángulos oblicuángulos 177
- Secuencia 17. **Solución de triángulos oblicuángulos** 183
  - Problemas clásicos 183
  - Otros problemas con triángulos oblicuángulos 186
- Evaluación 189

Bibliografía y referencias electrónicas 191

Créditos iconográficos 192

© MONTENEGRO®

Propiedades de los triángulos no rectángulos

Secuencia 16

Aprendizaje esperado: propone de manera colaborativa el uso de leyes de senos y cosenos como alternativas de solución para situaciones reales.

Producto: dilema matemático para el **cálculo de la longitud** existente entre el cerro del Grillo y el cerro de la Bufa.

Inicio

En secuencias anteriores aprendiste a resolver todo tipo de problemas con triángulos rectángulos, pero los dilemas que surgen en las ciencias y en la vida real no siempre versarán sobre este tipo de triángulos, por lo que es preciso aplicar los conocimientos trigonométricos para resolver cualquiera de ellos. Por ejemplo, si sabes que en un triángulo dos de sus lados miden 50 y 70 metros y forman un ángulo de 115°, ¿Podrías saber cuánto mide el tercer lado y los otros ángulos? El propósito de esta secuencia es que obtengas el conocimiento para resolver problemas con cualquier tipo de triángulo.

Actividad

Escribe en la tabla *V* si la afirmación es verdadera o *F* si es falsa. Argumenta tus respuestas.

Enunciado	Falso o verdadero	Argumento de la respuesta
Existen triángulos equiláteros que son rectángulos.		
Existen triángulos obtusángulos que tienen un ángulo recto.		
Existen triángulos rectángulos que son isósceles.		
Todo triángulo escaleno es obtusángulo.		
Un triángulo isósceles no puede ser obtusángulo.		
Todo triángulo equilátero es acutángulo.		

© MONTENEGRO®

Articulación con otras asignaturas

Física I

En esta secuencia trabajarás con triángulos que no son rectángulos, esto es, triángulos cuyos lados no forman ángulos rectos y que son denominados **oblicuángulos**. Éstos pueden ser de dos clases de triángulos; obtusángulos y acutángulos.

Funciones trigonométricas de ángulos suplementarios y complementarios

Para comenzar, repasarás las relaciones entre las funciones seno, coseno y tangente de ángulos complementarios y suplementarios, extendiéndolas a sus funciones recíprocas. Recuerda cuándo se dice que dos ángulos son complementarios y cuándo que son suplementarios. Observa las figuras y sigue los argumentos.

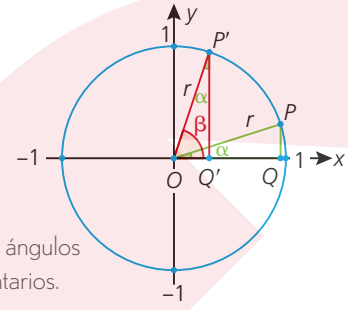

Fig. 6.1 Dos ángulos complementarios.

En la Fig. 6.1, en el primer cuadrante se han trazado dos triángulos rectángulos congruentes OQP y $OQ'P'$; sus ángulos agudos son α y β y que son complementarios, esto es, suman $90°\left(\frac{\pi}{2}\ rad\right)$. En símbolos: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, en donde $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

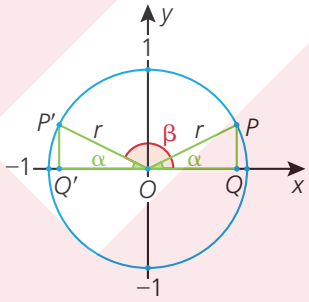

Fig. 6.2 Obtención de un ángulo a partir de otros dos congruentes.

En la Fig. 6.2 se han trazado dos triángulos congruentes OQP y $OQ'P'$ con un ángulo agudo α y un ángulo $\beta = \measuredangle QOP'$ por lo que los ángulos α y β son suplementarios, es decir, suman $180°$ (π *rad*), y donde $\beta > \alpha$. En símbolos: $\alpha + \beta = \pi$, donde $\beta = \pi - \alpha$.

Explica en tu cuaderno las afirmaciones de las Fig. 6.1 y 6.2, incluye tus conclusiones.

Relaciones entre funciones trigonométricas de ángulos complementarios

En secuencias anteriores estudiaste las relaciones entre funciones trigonométricas de ángulos complementarios, lee la siguiente información para recordarlas y deducirlas.

Como viste en la Fig. 6.1, los $\triangle OP'Q'$ y $\triangle POQ$ son congruentes por construcción y los ángulos α y β son complementarios. Además, ambos triángulos son rectángulos y tienen como hipotenusa el radio del círculo unitario. Por congruencia, $\overline{PQ} = \overline{OQ'}$ y $\overline{OQ} = \overline{P'Q'}$.

© MONTENEGRO®

Por un lado, en $\triangle POQ$, $sen\,\alpha = \frac{PQ}{OP}$ y $OP = 1$ entonces $sen\,\alpha = PQ$.

Por otro lado, en $\triangle OP'Q'$, $cos\,\beta = \frac{OQ'}{OP'}$ y $OP' = 1$ entonces $cos\,\beta = OQ'$.

Como $\overline{PQ} = \overline{OQ'}$, se tiene que $sen\,\alpha = cos\,\beta = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

De manera similar se llega a que $cos\,\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Una vez que se saben las relaciones entre el seno y el coseno de ángulos complementarios, se recuerda que $tan\,\beta = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$, por lo que:

$$tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ y}$$

$$cot\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Mientras que las funciones recíprocas de seno y coseno, cosecante y secante, respectivamente, cumplen:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ y}$$

$$sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{sen\,\alpha} = csc\,\alpha$$

TIC

Visita el siguiente enlace para complementar tu aprendizaje acerca de las funciones trigonométricas de ángulos complementarios. https://bit.ly/3j2JVGv (Consulta: 15 de octubre de 2020).

Actividad

1. En parejas, revisen y comparen sus respuestas de la actividad inicial de esta secuencia y las actividades individuales anteriores. Si tienen diferentes puntos de vista, expliquen uno a otro su manera de razonar para encontrar las respuestas correctas y corregir lo que sea necesario.
2. Con los resultados del análisis aplicado a los ángulos complementarios de la actividad de la página anterior completen la tabla.

Razones	Razones inversas
$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$	$csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$
$= sen\,\alpha$	$sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$
$\frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} =$	$= cot\,\alpha$

3. Completen las relaciones partiendo de que α y β son complementarios.
   a) Si $\alpha = 17°$ entonces $\beta =$ _____, _____ $73° = cos$ _____
   b) Si $\alpha =$ _____ entonces $\beta = 54°$ _____ $54° = sen$ _____

© MONTENEGRO®

c) Si $\alpha = 5°$ entonces $\beta =$ _____, $\frac{1}{\tan 85°} = \tan$ _____

d) Si $\alpha = 40°$ entonces $\beta =$ _____, $\csc$ _____ = _____ $50°$

e) Si $\alpha =$ _____ entonces $\beta = 84°$, _____ $6° =$ _____ $84°$

f) Si $\alpha =$ _____ entonces $\beta = 15°$, _____ $15° = \cot$ _____

Relaciones entre funciones trigonométricas de ángulos suplementarios

En la Fig. 6.2, $\triangle OP'Q'$ y $\triangle OPQ$ son congruentes por construcción. El $\measuredangle\alpha$ en el primer cuadrante lo determina el $\overline{OP}$ y el $\measuredangle\alpha$ en el segundo cuadrante lo determina el $\overline{OP'}$. Has visto que $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\beta$ son suplementarios, esto es; $\beta + \alpha = \pi$ donde $\beta = \pi - \alpha$.

Por estar P y P' en el círculo unitario, sus coordenadas son $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $P' = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Como $\triangle OP'Q'$ y $\triangle OPQ$ son congruentes, sus catetos son iguales en valor absoluto pero, de acuerdo a los signos de las coordenadas en el plano cartesiano, en el primer cuadrante ambas coordenadas son positivas y en el segundo cuadrante, la abscisa o cateto $\overline{OQ'}$ es negativo, mientras que la ordenada o cateto $\overline{P'Q'}$ es positivo. Así, $\overline{OQ} = -\overline{OQ'}$, por lo que $\cos\alpha = -\cos\beta = -\cos(\pi - \alpha)$, mientras que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, por lo que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$.

Una vez que sabes las relaciones entre el seno y el coseno de ángulos suplementarios, recuerda que $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Entonces, $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{-\cos(\pi - \alpha)} = -\tan(\pi - \alpha)$

y $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{-\cos(\pi - \alpha))}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = -\cot(\pi - \alpha)$

Mientras que las funciones recíprocas de seno y coseno, es decir, cosecante y secante, respectivamente, cumplen:

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\cos(\pi - \alpha)} = -\sec(\pi - \alpha)$

y $\csc(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = \csc(\pi - \alpha)$

TIC

Repasa las relaciones entre ángulos suplementarios y complementarios en el siguiente enlace. https://bit.ly/2KSUYmk (Consulta: 15 de octubre de 2020).

Practica las relaciones entre ángulos suplementarios y complementarios en la siguiente liga. https://bit.ly/2N9nC5u (Consulta: 15 de octubre de 2020).

Actividad

1. Completa la siguiente tabla.

Razones	Razones inversas
$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) =$	$\csc(\pi - \alpha) =$
$= \cos\alpha$	$= -\sec\alpha$
$-\tan(\pi - \alpha) =$	$= -\cot\alpha$

© MONTENEGRO®

2. Partiendo de que *a* y *b* son suplementarios, completa las razones trigonométricas con la información correcta.
   a) Si $\alpha = 17°$ entonces $\beta =$ _____, *sen* _____ = _____17°
   b) Si $\alpha =$ _____ entonces $\beta = 144°$, *cos* _____ = _____ 144°
   c) Si $\alpha = 85°$ entonces $\beta =$ _____, $-$*tan* _____ = _____ 85°
   d) Si $\alpha =$ _____ entonces $\beta = 174°$, *csc* _____ = _____ 174°
   e) Si $\alpha = 45°$ entonces $\beta =$ _____, $-$*sec* _____ = *sec* _____
   f) Si $\alpha =$ _____ entonces $\beta = 105°$, *cot* _____ = _____ 105°

Resolución de triángulos oblicuángulos

Con el fin de ampliar los resultados de la trigonometría para el caso de triángulos oblicuángulos, se puede empezar por hacer la extensión del teorema de Pitágoras para este tipo de triángulos, conocida como ley de los cosenos.

Ley de los cosenos

En la Fig. 6.3 aparece un triángulo oblicuángulo, en el cual se ha trazado la altura desde el vértice *C*, misma que corta el lado opuesto en *D*; este punto divide el lado *c* en dos segmentos, c_1 y c_2. La altura *CD* determina dos triángulos rectángulos en cada uno de los cuales se cumple el teorema de Pitágoras. Esto es: $a^2 = h^2 + c_2^2$ y $b^2 = h^2 + c_1^2$

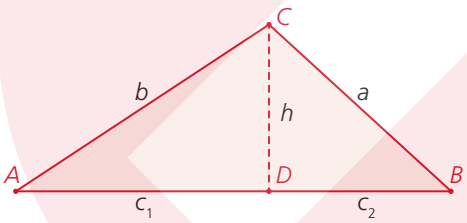

Fig. 6.3 Triángulo oblicuángulo para deducir la ley de los cosenos.

En el triángulo de lados c_1, *b* y *h*, se cumple que $sen\angle A = \frac{h}{b}$ y $cos\angle A = \frac{c_1}{b}$.

Despejando numeradores se obtiene:
$h = b\ sen\angle A$ y $c_1 = b\ cos\angle A$.

Como $c = c_1 + c_2$, queda $c = b\ cos\angle A + c_2$, de donde $c_2 = c - b\ cos\angle A$.

Como $a^2 = h^2 + c_2^2$, $a^2 = (b\ sen\angle A)^2 + (c - b\ cos\angle A)^2$ y, desarrollando cuadrados y el binomio al cuadrado, $a^2 = b^2\ sen^2\angle A + c^2 - 2cb\ cos\angle A + b^2 cos\angle A$.

Factorizando b^2, se tiene que: $a^2 = b^2\,(sen^2\angle A + cos^2\angle A) + c^2 - 2cb\ cos\angle A$,

y usando que: $sen^2 x + cos^2 x = 1$ para todo *x*, se obtiene: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\ cos\angle A$.

TIC

En el siguiente enlace, mueve los deslizadores y comprende con claridad los temas que repasaste en esta sección.
https://bit.ly/2OYQ4cY
(Consulta: 15 de octubre de 2020).

Nomenclatura matemática

Para evitar confusiones, los ángulos de un triángulo se denominarán como sus vértices: *A*, *B* y *C*. Asimismo, al lado opuesto de *A* se le llama *a*, al opuesto de *B* se le llama *b*, y al opuesto de *C* se le llama *c*.

© MONTENEGRO®

Un desarrollo similar se puede hacer a partir del triángulo de lados c_2, a, y h, donde se cumple que $sen\angle B = \frac{h}{a}$ y $cos\angle B = \frac{c_2}{a}$ lo que lleva a que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ca\ cos\angle B$.

Si en el mismo triángulo ABC en lugar de usar la altura por C se usa la altura por B, que hemos llamado h', se forman los triángulos rectángulos AEB y CEB, como se muestra en la Fig. 6.4. Además, $EA = EC + b$.

En éstos, $sen\angle BCE = \frac{h'}{a}$ y $cos\angle BCE = \frac{EC}{a}$, pero $\angle BCE + \angle C = +180°$, así que $sen\angle C = sen\angle BCE = \frac{h'}{a}$ y $cos\angle C = -cos\angle BCE = \frac{EC}{a}$.

Despejando a en cada igualdad: $h' = a\,sen\angle C$ y $EC = -a\,cos\angle C$.

Como $c^2 = h'^2 + EA^2 = a^2\,sen^2\angle C + (EC + b)^2 = a^2\,sen^2\angle C + (-a\,cos\angle C + b)^2 = a^2\,sen^2\angle C + a^2\,cos^2\angle C - 2ab\,cos\angle C + b^2$.

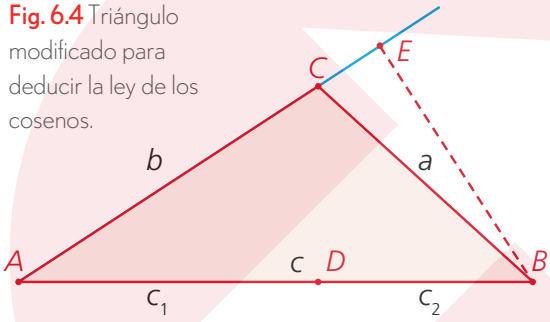

Fig. 6.4 Triángulo modificado para deducir la ley de los cosenos.

Factorizando a^2, y usando que $sen^2 x + cos^2 x = 1$ para todo x, queda:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\ cos\angle C$

Como puedes ver, las tres igualdades son la misma, sólo cambian las literales que representan los lados y ángulos. En todos los casos la igualdad permite calcular el tercer lado a partir de dos lados y el ángulo que forman. En cualquiera de sus formas, la igualdad es conocida como la ley de los cosenos y se escribe: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\ cos\angle C$.

Aplicación de la ley de los cosenos, caso LAL

Si observas la ley de los cosenos en cualquiera de las formas desarrolladas en el apartado anterior, $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\ cos\angle A$, se tiene una igualdad que permite obtener el cuadrado de un lado del triángulo, a partir de conocer los otros dos lados y el ángulo que forman. En este ejemplo se conocerían b, c y el ángulo que forman, $\angle A$. Lo mismo en los otros casos.

Esta situación la representamos de manera similar a como se hizo con los triángulos congruentes, escribiendo caso LAL para simbolizar que se conocen dos lados y el ángulo que forman, por eso la A se pone en medio de las dos L.

También es importante subrayar que la ley de los cosenos es una generalización del teorema de Pitágoras y por lo tanto funciona para cualquier tipo de triángulo, incluso en triángulos rectángulos.

Para saber más

En *Los elementos* de Euclides, siglo III a.n.e., se mostraba ya una aproximación a la generalización del teorema de Pitágoras, pero faltaban las funciones trigonométricas y el álgebra. Fue con la trigonometría árabe-musulmana de la Edad Media cuando se comprendió con claridad el alcance de este famoso teorema.

© MONTENEGRO®

Actividad

Transversalidad

Coordinación de proyectos.

1. Formen parejas y contesten lo siguiente.

a) ¿Qué sucede con la ecuación de la ley de cosenos cuando trabajas con un triángulo rectángulo, es decir, cuando $C = 90°$? _____

_____

_____

b) Completen la tabla, calculen en su calculadora el coseno de los ángulos y al terminar la actividad, comenten sus respuestas.

Grados	110°	105°	100°	95°	90°	85°	80°	75°	70°
Coseno									

c) Observen la Fig. 6.4. y la siguiente tabla, en ellas se proporcionan la longitud de dos de los lados de un triángulo oblicuángulo, *a* y *b*, y el ángulo que forman. Usando la ley del coseno calculen la longitud del tercer lado, *c*.

a	*b*	*c*	$\cos c$	$2ab\cos c$	c^2	*c*
10	10	55°				
10	10	40°				
20	10	25°				
20	40	110°				
30	30	1°				
30	30	170°				

2. Resuelvan el problema planteado al inicio de esta secuencia: si sabemos que en un triángulo dos de sus lados miden 50 y 70 m, y forman un ángulo de 115°.

a) ¿Cuánto mide el tercer lado? _____

b) ¿Cuánto miden los otros ángulos? _____

Ley de los senos, el caso ALA

Si conoces los tres lados de un triángulo, puedes calcular sus tres ángulos (como viste en el problema anterior); eso sería el caso LLL, que también se resuelve con la ley de los cosenos despejando el coseno del ángulo y aplicando la función inversa cos^{-1}.

Cuando la información que se tiene en un triángulo oblicuángulo es la longitud de sólo uno de sus lados y dos ángulos, casos ALA o AAL, o bien, dos lados y un ángulo que no es el formado por dichos lados, caso LLA, no se puede aplicar la ley de los cosenos, por lo que se utiliza la ley de los senos.

© MONTENEGRO®

Análisis y deducción de la ley de los senos

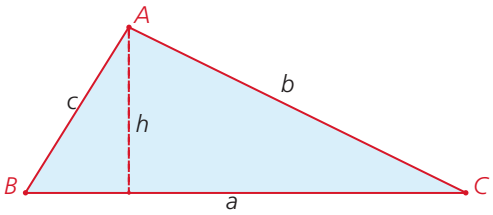

Fig. 6.5 Triángulo obtusángulo.

Para encontrar la relación buscada observa la Fig. 6.5.

Al expresar la razón trigonométrica seno de los ángulos $\measuredangle C$ y $\measuredangle B$ se tiene que:

$$senC = \frac{h}{b} \text{ y } senB = \frac{h}{c}.$$

Despejando h en las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$h = b\,senC \text{ y } h = c\,senB.$$

Por lo que $c\,senB = b\,senC$.

Dividiendo ambos términos de la igualdad entre el producto $sen\,B\,sen\,C$, se tiene que: $\frac{c\,senB}{senB\;senC} = \frac{b\,senC}{senB\;senC}$ y, finalmente, $\frac{c}{senC} = \frac{b}{senB}$.

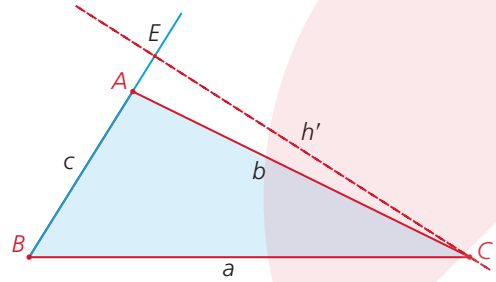

Fig. 6.6 Triángulo obtusángulo para la deducción de la ley de los senos.

Observa la Fig. 6.6, es igual que la 6.5, pero se ha trazado la altura por C y denominado h'. Ésta ha determinado los dos triángulos rectángulos BCE y ACE con ángulos rectos comunes en el vértice E.
En $\triangle BCE$, $sen\,B = \frac{h'}{a}$.

En $\triangle ACE$, $sen\,\angle CAE = \frac{h'}{b}$.

Pero $\angle CAE = \pi - \angle BAC = \pi - \angle A$ y como el seno de ángulos suplementarios es el mismo, resulta que $sen\,\angle CAE = sen\,\angle A$. Así, $h' = a\,sen\,B$ y $h' = b\,sen\,A$, por lo que $a\,sen\,B = b\,sen\,A$.

Dividiendo ambos términos de la igualdad entre el producto $sen\,A\,sen\,B$ queda:

$$\frac{a\,senB}{sen\,A\;sen\,B} = \frac{b\,sen\,A}{sen\,A\;sen\,B}$$

donde:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{senB}$$

uniendo los dos resultados:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

La ecuación resultante muestra que las longitudes de los lados de cualquier triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos; a esta propiedad se le conoce como **ley de los senos.**

La ley de los senos permite obtener ángulos o lados, con base en los datos con los que se cuente. Así como la ley de los cosenos se usó para encontrar el tercer lado de un triángulo, dados dos lados y el ángulo que forman, se puede usar la ley de los senos cuando se conocen dos ángulos y un lado, o cuando se conocen dos lados y un ángulo, pero éste no es formado por dichos lados.

© MONTENEGRO®

Actividad

1. En la siguiente tabla aparecen las medidas de dos lados de un triángulo y un ángulo que no es el formado por dichos lados, complétala según corresponda.

	a	c	$\measuredangle C$	$\operatorname{sen} C$	$\operatorname{sen} A =$	$\measuredangle A$	$\measuredangle B$
a)	10	10	55°				
b)	10	7.65	40°				
c)	20	12.39	25°				
d)	20	52.91	110°				

2. En la siguiente tabla aparecen las medidas de dos ángulos y un lado adyacente a ambos, complétala según corresponda.

	c	$\measuredangle A$	$\measuredangle B$	$\measuredangle C$	$\operatorname{sen} A$	$\operatorname{sen} B$	$\operatorname{sen} C$		$a =$	$b =$
a)	7	40°	65°							
b)	9	50°	70°							
c)	11.5	45°	55°							
d)	15	80°	35°							

3. Observa la Fig. 6.7, en ella aparecen dos triángulos adyacentes; ABC y CBC'. Se incluyen las medidas de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BC'}$ de cada uno y del ángulo A. Resuelve lo que se solicita en tu cuaderno.

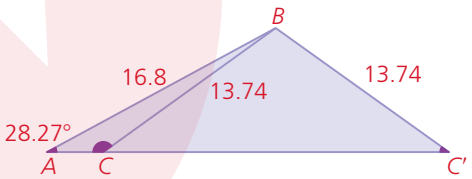

Fig. 6.7 Triángulo formado por otros dos triángulos adyacentes.

a) ¿Podrías usar la ley de los cosenos para encontrar la amplitud de los otros ángulos? Explica tu respuesta.

b) ¿Podrías usar la ley de los senos? Argumenta tu respuesta.

Cierre

En esta secuencia aprendiste a resolver triángulos oblicuángulos usando la ley de los cosenos o la ley de los senos, según sea el caso.

La siguiente lista resume las reglas para resolver problemas con triángulos, según la información con la que se cuente. Utilízala para resolver el dilema matemático.

© MONTENEGRO®

1. Si conoces dos ángulos, puedes calcular fácilmente el tercero ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°.
2. Si conoces los tres ángulos, pero no tienes la longitud de ninguno de los lados puedes determinar la forma del triángulo, pero no su tamaño.
3. Si conoces la longitud de dos de sus lados, a y b, y la amplitud del ángulo entre ambos lados, C, entonces podrás encontrar el tercer lado usando la ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.
4. Si conoces la longitud de uno de los lados del triángulo, a, y los dos ángulos de sus extremos, B y C, entonces podrás encontrar el tercer ángulo:
$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},\ c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$
5. Si conoces la longitud de los tres lados, usarás la ley de los cosenos para encontrar los cosenos de los ángulos:
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$ y después la función inversa del coseno $\cos^{-1}$.
De forma similar se obtienen las expresiones para $\cos A$ y $\cos B$.
6. Si conoces la longitud de dos lados, b y c, y la amplitud de uno de los ángulos que no es el que se encuentra entre dichos lados; hay cuatro posibilidades si el ángulo dado es agudo y dos si es obtuso o recto.
Si el ángulo que conoces $\measuredangle B$ es agudo se usa la ley de los senos: $\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} B}{b}$.
   - **a)** Si $\frac{c \operatorname{sen} B}{b} < 1$ y $b < c$, hay dos valores posibles para C, uno agudo y otro obtuso. Se conoce como caso ambiguo.
   - **b)** Si $\frac{c \operatorname{sen} B}{b} = 1$, entonces C es un ángulo recto y sólo hay un triángulo que cumple con la información dada.
   - **c)** Si $\frac{c \operatorname{sen} B}{b} > 1$ significa $\operatorname{sen} C > 1$ lo cual es imposible; así que no hay triángulo que cumpla con las especificaciones dadas.
   - **d)** Si $b > c$, entonces el $\measuredangle C$ también es un ángulo agudo, y sólo hay un ángulo que satisface las condiciones dadas.
7. Si el $\measuredangle B$ es obtuso o recto:
   - **a)** Si $b > c$, sólo hay un triángulo que satisface las condiciones dadas.
   - **b)** Si $b \leq c$, no hay un triángulo que cumpla con las condiciones dadas.

Dilema matemático

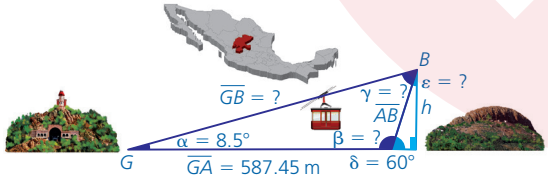

Fig. 6.8 Representación del funicular de Zacatecas.

Imagina que trabajas como auxiliar del ingeniero que está construyendo el **funicular** en Zacatecas. El ingeniero a cargo necesita información para presentar el proyecto al gobernador del estado, te entrega un esquema y quiere que le digas antes del mediodía: ¿Cuánto va a medir el recorrido del funicular de la base del cerro del Grillo a la loma del cerro de la Bufa, $\overline{BC}$? y ¿Qué altura tiene el cerro de la Bufa, h? ¿Cómo harías el cálculo de la longitud?

Actividad

1. Con ayuda de la información anterior, en tu cuaderno, calcula los ángulos que faltan.
2. Desarrolla las operaciones y calcula también lo que pidió el ingeniero. Guarda una copia de tus respuestas en el portafolio de evidencias.

Glosario

Funicular: vehículo o artefacto cuya tracción se hace por medio de una cuerda, cable o cadena.

© MONTENEGRO®

Bachillerato General

Dosificación

Libro de Matemáticas II

Edición anotada para el maestro

Maríana Sáiz Roldán · Edith Sáiz Roldán

ISBN 978-607-627-387-6

MONTENEGRO®
TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN

MB
Montenegro Bachillerato

BLOQUE 1. ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS

PROPÓSITO:
Desarrolla estrategias para representar su entorno en la resolución de problemas tanto hipotéticos como reales, mediante el uso de los teoremas de Tales y Pitágoras, así como por criterios de semejanza y congruencia de triángulos.

EJES TRANSVERSALES:	TEMAS DE LOS EJES TRANSVERSALES:	INTERDISCIPLINARIEDAD:
• Habilidades lectoras.	• Desarrollo de la comprensión lectora.	• Taller de Lectura y Redacción I.

SECUENCIA 1. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

APRENDIZAJE ESPERADO:
Resuelve colaborativamente problemas usando los criterios de congruencia y semejanza para relacionarlos con objetos de su entorno.

TEMAS	SESIONES	PÁGINAS DEL LIBRO DEL ALUMNO Y MAESTRO
Elementos geométricos	6	15
▪ Conceptos geométricos		15
▫ Puntos, rectas y planos		15-20
▪ Ángulos		20
▫ Sistemas de medición		20-24

RECURSOS:
- Definición de términos e información adicional.
- Referencias y páginas de internet adicionales:
  https://bit.ly/319sKNp
  http://bit.ly/30xTHY5

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN:
- Lista de cotejo.
- Rúbrica.
- Guía de observación.
- Portafolio de evidencias.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS:
- Pide a los alumnos visitar el siguiente enlace para recordar algunos de los conceptos que se utilizarán en el desarrollo de esta secuencia https://bit.ly/2TbGu5N (Consulta: 21 de octubre de 2020).
- Pide a los alumnos contestar la actividad que se encuentra en el siguiente enlace para poner a prueba los conocimientos que adquirieron en esta secuencia https://bit.ly/37ug9bo (Consulta: 21 de octubre de 2020).

© MONTENEGRO®